# 2.4. Преобразования Лоренца.

2.4.1. Преобразования из общих свойств пространства и времени.

Воспользуемся общими свойствами пространства и времени для определения преобразований координат и времени при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую. Общий вид преобразований[1] координат и времени при переходе от К системы отсчета в К′ систему отсчета могут быть записаны в самом общем виде:

$$\begin{aligned} x' &= \Phi_1(x,y,z,t), \quad y' = \Phi_2(x,y,z,t), \\ z' &= \Phi_3(x,y,z,t), \quad t' = \Phi_4(x,y,z,t) \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Из однородности пространства и времени следует *линейность этих преобразований*. В самом деле, если рассмотреть бесконечно малое смещение:

$$dx' = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}dz + \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}dt, \tag{2.4.2}$$

то из-за однородности пространства и времени это выражение должно оставаться одинаковым во всех точках пространства и времени. Следовательно, частные производные в (2.4.2) должны быть постоянными величинами. Отсюда следует линейность преобразований, то есть они имеют вид:

$$\Phi_1(x,y,z,t) = A_1x + A_2y + A_3z + A_4t + A_5 \tag{2.4.3}$$

То же самое имеем и для остальных функций в (2.4.1). Выберем обе системы отсчета так, что в начальный момент времени $t = 0$ начала координат К и К′ систем отсчета совпадают. Тогда автоматически получаем, что коэффициент $A_5$ равен 0. Итак, преобразования имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4 t \\ y' &= a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 t \\ z' &= b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 t \\ t' &= d_1 x + d_2 y + d_3 z + d_4 t \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

Это общие преобразования, которые справедливы при любом направлении относительного движения 2-х систем отсчета.

2.4.2. Преобразования $y$ и $z$ координат.

Итак, рассматриваем 2 инерциальные системы отсчета К и К′ (рис. 4.1), причем, как и ранее, оси $x$ и $x'$ совпадают по направлению и К′ система движется относительно К системы вдоль оси $x$ со скоростью $V_0$.

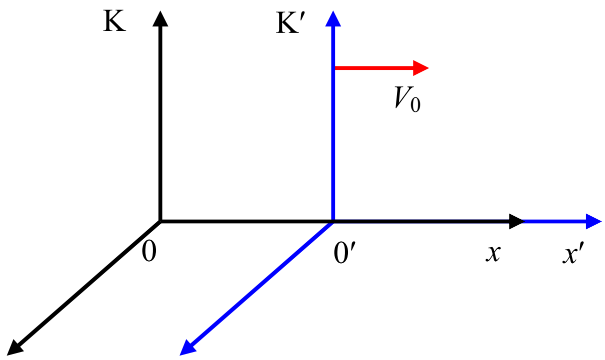


Рис. 4.1.

Поскольку оси $y$ и $z$ перпендикулярны относительному движению, рассмотрим сначала их преобразование.

Так как оси $x$ и $x'$ совпадают, то для точек $y = z = 0$ следует также, что $y' = z' = 0$ при любых $x$, $y$, $z$, и $t$. Заметим, что меняться могут отрезки – линейные масштабы, а точки всегда переходят в точки в другой системе отсчета. Тогда можно записать из уравнений (2.4.4) для $y' = 0$ и $z' = 0$, соответственно:

$$\begin{aligned} a_1 x + a_3 z + a_4 t &= 0 \\ b_1 x + b_2 y + b_4 t &= 0 \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

И так как последние равенства выполняются при любых $x$, $y$, $z$ и $t$ (они все относятся к одной системе отсчета), из (2.4.5) следует, что

$$\begin{aligned} a_1 &= a_3 = a_4 = 0 \\ b_1 &= b_2 = b_4 = 0 \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

[1] Вывод аналогичен выводу, приведенному в учебнике А.Н. Матвеева.

Следовательно, из (2.4.4) остается зависимость координат $y$ и $z$ соответственно друг от друга, причем в силу равноправности этих осей по отношению к оси $x$ коэффициенты одинаковы:

$$y' = ay, \qquad z' = az \tag{2.4.7}$$

Можно записать из (2.4.7) обратное преобразование:

$$y = \frac{1}{a}y', \quad z = \frac{1}{a}z' \tag{2.4.8}$$

Из-за равноправия систем отсчета при переходе от одной ИСО к другой длина масштаба должна измениться точно также как при обратном переходе, то есть из (2.4.7) и (2.4.8) следует:

$$\frac{1}{a} = a \qquad \text{и} \qquad a^2 = 1 \tag{2.4.9}$$

Отсюда получаем 2 решения $a = \pm 1$. Выбираем решение $a = 1$, при этом оси $y$ и $y'$ (также как и $z$ и $z'$) сонаправлены. Отметим, что при коэффициенте $a = -1$ соответствующие оси направлены в противоположные стороны. Итак, окончательно получаем преобразования для $y$ и $z$ координат:

$$y = y', \quad z = z' \tag{2.4.10}$$

То есть при переходе от К системы отсчета к К' системе перпендикулярные к направлению движения масштабы не изменяются: *$y$ и $z$ координаты неизменны*.

2.4.3. <u>Преобразования $x$ и $t$ координат</u>.

Поскольку координаты $y$ и $z$ при переходе из одной ИСО в другую связаны отдельно (2.4.10) и не зависят от $x$ и $t$, то последние могут быть связаны только друг с другом. Поэтому запишем:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma x + \beta t \\ x &= \gamma' x' + \beta' t' \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

Воспользуемся равноправностью ИСО и постулатом о постоянстве скорости света и рассмотрим эти преобразования поэтапно.

1). Рассмотрим точку начала координат системы К'. Точка начала координат К'- системы относительно К системы движется с постоянной скоростью $V_0$ и имеет следующие координаты: $x = V_0 t$ и $x' = 0$. Поэтому, подставляя эти координаты в первое уравнение (2.4.11), имеем:

$$0 = \gamma V_0 t + \beta t \qquad \text{и} \qquad \beta = -\gamma V_0$$

Далее подставляя в (2.4.11), получаем:

$$x' = \gamma(x - V_0 t) \tag{2.4.12}$$

2). Аналогично рассмотрим движение начала координат системы отсчета К. С точки зрения наблюдателя в К системе имеем $x = 0$, а с точки зрения К'- системы – $x' = -V_0 t$. Тогда получаем из второго уравнения (2.4.11) следующее выражение:

$$x = \gamma'(x' + V_0 t') \tag{2.4.13}$$

3). Докажем, что $\gamma' = \gamma$. Для этого измеряем длину стержня в двух ситуациях.

Пусть стержень покоится в К' системе (рис. 4.2), тогда его длина в этой системе равна разности координат левого и правого концов стержня:

$$l = x_2' - x_1' \tag{2.4.14}$$

Длина стержня с точки зрения наблюдателя в К системе – разность координат концов стержня, взятых в одно и то же время, например $t_0$, в К системе отсчета. Тогда пользуясь (2.4.12), имеем для этих координат следующие соотношения:

$$x_1' = \gamma(x_1 - V_0 t_0), \quad x_2' = \gamma(x_2 - V_0 t_0)$$

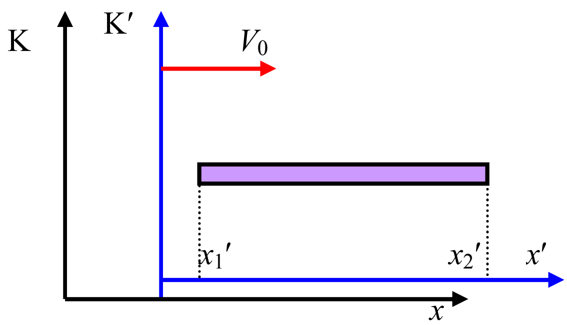


Рис. 4.2.

Следовательно длина движущегося стержня в К системе отсчета равна:

$$x_2 - x_1 = \frac{x_2' - x_1'}{\gamma} = \frac{l}{\gamma} \tag{2.4.15}$$

Пусть теперь стержень покоится в К системе (рис. 4.3), тогда его длина в этой системе равна:

$$l = x_2 - x_1 \tag{2.4.16}$$

Пользуясь (2.4.13), имеем для этих координат следующие соотношения, взятых также в один момент времени $t_0'$:

$$x_1 = \gamma'(x_1' + V_0 t_0'), \qquad x_2 = \gamma'(x_2' + V_0 t_0')$$

Беря разность координат, имеем:

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\gamma'} = \frac{l}{\gamma'} \tag{2.4.17}$$

В силу равноправности систем отсчета измерение покоящегося стержня должно давать один и тот же результат, поэтому получаем:

$$\frac{l}{\gamma} = \frac{l}{\gamma'}$$

и отсюда имеем:

$$\gamma = \gamma'. \tag{2.4.18}$$

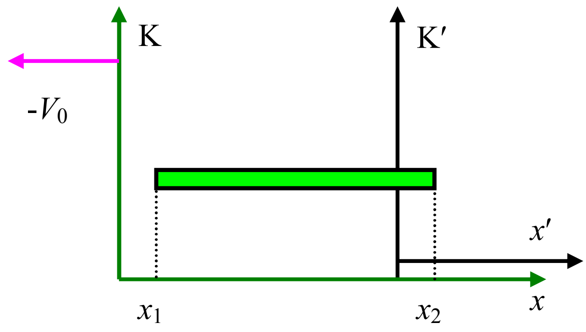


Рис. 4.3.

4). Получим коэффициент $\gamma$ из постулата о постоянстве скорости света. Пусть световой сигнал испускается из начала координат систем К' и К в момент времени $t = t' = 0$. Тогда координаты светового сигнала в этих системах равны:

$$x' = ct', \qquad x = ct \tag{2.4.19}$$

Подставим в (2.4.19) преобразования (2.4.12) и (2.4.13):

$$ct' = \gamma(x - V_0 t), \quad ct = \gamma(x' + V_0 t')$$

И далее снова используя (2.4.19) для подстановки $x'$ и $x$, получаем:

$$ct' = \gamma t(c - V_0), \quad ct = \gamma t'(c + V_0) \tag{2.4.20}$$

Перемножая уравнения (2.4.20) и сокращая временные множители, получаем коэффициент $\gamma$:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V_0^2}{c^2}}} \tag{2.4.21}$$

Тогда *преобразование координат* $x'$ и $x$ имеет вид:

$$x' = \frac{x - V_0 t}{\sqrt{1 - \dfrac{V_0^2}{c^2}}} \tag{2.4.22}$$

Преобразование для времени получаем из формул (2.4.12) и (2.4.13), предполагая (2.4.18) и (2.4.21):

$$x' = \gamma(x - V_0 t), \quad x = \gamma(x' + V_0 t'). \tag{2.4.23}$$

Из второго уравнения выражаем $V_0 t'$ и подставляем $x'$ из первого:

$$V_0 t' = \frac{x}{\gamma} - x' = \frac{x}{\gamma} - \gamma(x - V_0 t) = \gamma V_0 t - x\left(\frac{1}{\gamma} - \gamma\right) = \gamma V_0 t - x\frac{\dfrac{V_0^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{V_0^2}{c^2}}}$$

Отсюда для *преобразования времени* получаем:

$$t' = \frac{t - \dfrac{V_0}{c^2}x}{\sqrt{1 - \dfrac{V_0^2}{c^2}}}. \tag{2.4.24}$$

Итак, получаем *преобразования Лоренца* при переходе из К системы отсчета в К':

$$x' = \frac{x - V_0 t}{\sqrt{1 - V_0^2 / c^2}}, \qquad t' = \frac{t - \frac{V_0}{c^2} x}{\sqrt{1 - V_0^2 / c^2}}, \qquad y' = y, \qquad z' = z \tag{2.4.25}$$

Обратное преобразование при переходе из К' в К систему записывается:

$$x = \frac{x' + V_0 t'}{\sqrt{1 - V_0^2 / c^2}}, \qquad t = \frac{t' + \frac{V_0}{c^2} x'}{\sqrt{1 - V_0^2 / c^2}}, \qquad y = y', \qquad z = z' \tag{2.4.26}$$

Иногда удобнее писать преобразования Лоренца, вводя величину $\beta$:

$$\beta \equiv V_0 / c \tag{2.4.27}$$

или величину $\gamma$ из (2.4.21). То есть можно записать преобразования в виде:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - V_0 t}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma (x - V_0 t), \qquad & y' = y, \\ t' &= \frac{t - \frac{V_0}{c^2} x}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \left( t - \frac{V_0}{c^2} x \right), \qquad & z' = z \end{aligned} \tag{2.4.28}$$

Аналогично преобразования записываются в обратную сторону.

При скоростях значительно меньших скорости света $V_0 << c$ преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея

$$x' \approx x - V_0 t, \quad t' = t, \quad y' = y, \quad z' = z \tag{2.4.29}$$

Таким образом, выполняется принцип дополнительности: новая теория (новые преобразования координат) включает в себя предыдущую в предельном случае малых скоростей объектов.