1.3. Преобразования Галилея.

1.3.1. Принцип относительности Галилея.

Принцип относительности: *Все инерциальные системы отсчета (ИСО) по своим физическим свойствам эквивалентны, т.е. никакими механическими опытами, проводимыми внутри ИСО, нельзя установить покоится ли эта система отсчета или движется равномерно и прямолинейно*.

Принцип относительности утверждает, что все законы механики (природы) инвариантны во всех ИСО. Рассмотрим две ИСО: К и К′ системы, изображенные на рис. 3.1. В каждой системе отсчета имеются свои тела отсчета в точках О и О' и свои часы. Любое событие с точки зрения наблюдателя из К системы характеризуется координатами и временем, пусть они равны (x,y,z,t). Пусть с точки зрения наблюдателя из К' системы эти величины равны (x',y',z',t'). Найдем связь между "штрихованными" и "нештрихованными" координатами и временем.

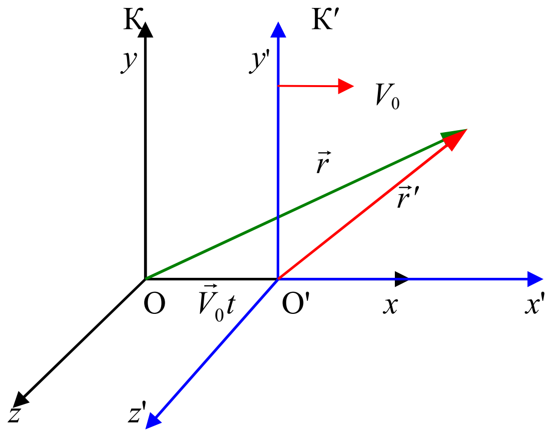

Рис. 3.1.

Рассмотрим преобразование координат события при переходе от системы К' к К, если скорость системы К' равна $\vec{V}_0$ и направлена вдоль оси x:

$$\begin{cases} x = x' + V_0 t \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \tag{1.3.1}$$

В общем случае направления скорости системы К′ относительно К системы формулу преобразования координат при переходе от системы К′ к системе К можно записать в следующем виде:

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{V}_0 t \tag{1.3.2}$$

Обратный переход от системы К к системе К′ записывается:

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{V}_0 t' = \vec{r} - \vec{V}_0 t \tag{1.3.3}$$

Отметим, что согласно принципу относительности Галилея все механические явления в ИСО К и К′ происходят одинаково. То есть движения тел отсчета О и О′ друг относительно друга происходят с одной и той же скоростью и в К и в К′ системах: $V_0 = V_0'$; $\vec{V}_0 = -\vec{V}_0'$. Тогда сравнивая уравнения (1.3.2) и (1.3.3), находим, что $t = t'$. Это означает, что время "течет" одинаково во всех ИСО. Иначе говоря, равенство $t = t'$ - условие абсолютной одновременности событий. Время *инвариантно* во всех ИСО.

Для получения преобразования скорости дифференцируем радиус-вектор материальной точки по времени t в системе К:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{1.3.4}$$

и дифференцируем по времени t' в системе К′:

$$\vec{v}\,' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}\,'}{\Delta t'} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} \tag{1.3.5}$$

Итак, дифференцируя (1.3.2) и (1.3.3) по времени t и учитывая, что скорость $\vec{V}_0$ не зависит от времени, получаем преобразование Галилея для скорости:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}\,' + \vec{V}_0 \\ \vec{v}\,' &= \vec{v} - \vec{V}_0 \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

Рассмотрим ускорение материальной точки:

$$\vec{w} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{и} \quad \vec{w}\,' \equiv \lim_{\Delta t' \to 0} \frac{\Delta \vec{v}\,'}{\Delta t'} = \frac{d\vec{v}\,'}{dt} \tag{1.3.7}$$

Дифференцируя (1.3.6) по времени, получаем *инвариантность ускорения*:

$$\vec{w} = \vec{w}' \qquad (1.3.8)$$

Таким образом, координаты и скорость материальной точки преобразуются при переходе от одной ИСО к другой по преобразованиям Галилея, а ускорение остается инвариантным.

1.3.2. Инварианты и инвариантность законов Ньютона.

Помимо ускорения существуют и другие инварианты, которые остаются неизменными в различных ИСО. Рассмотрим важнейшие из них:

1) расстояние между двумя точками; что легко увидеть из (1.3.2) и (1.3.3); в самом деле

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_2{}' - \vec{r}_1{}' = \Delta\vec{r}\,' \qquad (1.3.9)$$

2) относительная скорость двух тел $\vec{v}_{отн}$; действительно, из (1.3.6) имеем

$$\vec{v}_{отн} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_2{}' - \vec{v}_1{}' = \vec{v}'_{отн}\,; \qquad (1.3.10)$$

3) сила всегда есть функция разности координат (парная сила, например) и относительных скоростей (например, сила трения) $\vec{F}(\vec{r},\vec{v})$. Поэтому сила инвариантна относительно преобразований Галилея:

$$\vec{F} = \vec{F}' \qquad (1.3.11)$$

Пример: сила упругости в К системе имеет вид: $F = -k(x - x_0)$, где k - коэффициент упругости. В К′ системе эта сила равна: $F' = -k(x' - x'_0)$. Подставив преобразования координат $x' = x + vt$ и $x'_0 = x_0 + vt$, получаем: $F' = -k(x' - x'_0) = -k(x - vt - x_0 + vt) = -k(x - x_0) = F$.

4) масса - инвариант $m = m'$ при переходе от одной ИСО к другой.

Отсюда получаем важный результат: законы механики инвариантны относительно преобразований Галилея. Так, 2-ой закон Ньютона - *основное уравнение динамики* -

$$m\vec{w} = \sum_i \vec{F}_i\,,$$
$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i\,, \qquad (1.3.12)$$
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$$

инвариантен в любой ИСО.

1.3.3. Уравнение движения тела с переменной массой.

Получим уравнение для движения тела с переменной массой, пользуясь инвариантностью законов в различных ИСО. В качестве примера рассмотрим движение ракеты. Пусть:

а) в момент времени t ракета имеет массу m;

б) присоединяемая (отделяемая) масса имеет скорость $\vec{u}$ относительно массы m;

в) рассмотрим ИСО, скорость которой $\vec{V} = \vec{v}$ совпадает со скоростью ракеты в момент времени t, такая система отсчета называется сопутствующей системой отсчета;

г) за время от t до $t + dt$ материальная точка приобретает импульс $md\vec{v}$ как за счет внешних сил $\vec{F}dt$, так и за счет присоединяемой (отделяемой) массы $dm \cdot \vec{u}$:

$$md\vec{v} = \vec{F}dt + \vec{u}dm$$

Разделив обе части на dt, получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt}\vec{u} \qquad (1.3.13)$$

Это - уравнение Мещерского (*И.В. Мещерский, 1904*). Оно описывает движение тела, к которому присоединяется масса со скоростью $\vec{u}$ (это определяется знаком + в уравнении (1.3.13)). В силу принципа относительности Галилея это уравнение справедливо в любой ИСО, а не только в сопутствующей ИСО, где оно было получено.

Рассмотрим частные случаи уравнения Мещерского.

А) *Реактивная сила*: $\vec{F}_R = \vec{u}\dfrac{dm}{dt}$. Если тело теряет массу $\dfrac{dm}{dt} < 0$ и скорость выброса массы $\vec{u}$ направлена в противоположную сторону скорости тела $\vec{v}$, то реактивная сила есть сила ускорения (ракета) $F_R > 0$.

Б) Если скорость $\vec{u} = 0$, то $\vec{F}_R = 0$ и уравнение похоже на основное уравнение динамики, но только с массой зависящей от времени $m = m(t)$:

$$m(t)\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \tag{1.3.14}$$

Пример такого движения: движение цистерны, из которой выливается вода.

В) Случай когда $\vec{u} = -\vec{v}$ (т.е. присоединяемая масса неподвижна в выбранной системе отсчета или отделяемая масса становится неподвижной в этой СО), то

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \tag{1.3.15}$$

т.е. получили основное уравнение динамики для тела с переменной массой. Пример такого движения: движущаяся платформа, на которую сыплется песок из неподвижного бункера.